

Міністерство освіти і науки України
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

УДК 531.36:62-752+62-755

Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов

Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого
тіла двухмаятниковим (двухкульовим) автобалансиром

Кіровоград 2004

Розглянута задача про стійкість руху ізольованої матеріальної системи, яку утворюють абсолютно тверде тіло, що рухається плоскопаралельно, на центральну вісь якого, перпендикулярну площині руху, насаджено два однакових математичних маятника і усередині якого знаходиться матеріальна точка, що створює дисбаланс. Встановлено, що, за умови існування, глобально стійкий основний рух системи – у якому система обертається навколо центральної осі тіла, а решта рухів – побічних - нестійка.

Вступ. Маятникові (кульові) автобалансири застосовуються для зрівноважування на ходу роторів, що швидко обертаються [1]. На закритичних швидкостях обертання маятники, що вільно насаджено на вал ротора, самі займають положення, в якому зрівноважують ротор. Далі вони обертаються з ним як одне ціле, поки не почне змінюватися дисбаланс, або швидкість обертання ротора [1,2]. Це явище запропоновано використовувати для стабілізації положення осі обертання абсолютно твердого тіла щодо самого тіла [3]. Таким тілом може бути штучний супутник Землі, положення якого у просторі стабілізується обертанням навколо певної осі. В ідеальному випадку положення цієї осі щодо супутника не повинно змінюватися, у тому числі і при пересуванні мас, зв'язаних з супутником.

В цій роботі в рамках плоскої моделі досліджується задача про стійкість всіх усталених рухів системи шляхом дослідження на мінімум її повної (кінетичної) енергії. Далі, спираючись на отримані результати досліджується як швидко система буде повертатися до основного руху, якщо від нього відхилиться.

Зауважимо, що для настання автобалансування тіла достатньо, щоб з усіх усталених рухів системи глобально стійким був основний рух, а всі побічні - були нестійкими.

1. Опис моделі системи. Нехай абсолютно тверде тіло масою M здійснює плоскопаралельний рух. У площині руху тіла зображає деяка плоска фігура (рис. 1). В ідеальному випадку тіло повинно обертатися навколо власної центральної осі w , що перпендикулярна площині руху і проходить через точку O фігури. Оскільки система ізольована і також повинна обертатися навколо осі w , то остання повинна проходити через центр мас системи C . Позначимо через J_O осьовий момент інерції тіла відносно власної центральної осі w . Усередині тіла може рухатися матеріальна точка маси m_d , що створює дисбаланс. Для зрівноважування дисбалансу на вісь w , жорстко зв'язану з тілом, вільно насаджено два однакових математичних маятники, кожний масою m і довжиною l . Рух тіла визначається відносно осей x, y , що виходять із центра мас системи – точки C і обертаються синхронно з тілом із кутовою швидкістю ω . Не обмежуючи загальності, можна вважати, що точка C нерухома. Проведемо через точку O допоміжні осі u, v , що паралельні осям x, y . Положення

маятників визначається кутами φ, ψ , що відраховуються від осі v , як це показано на рис. 1.

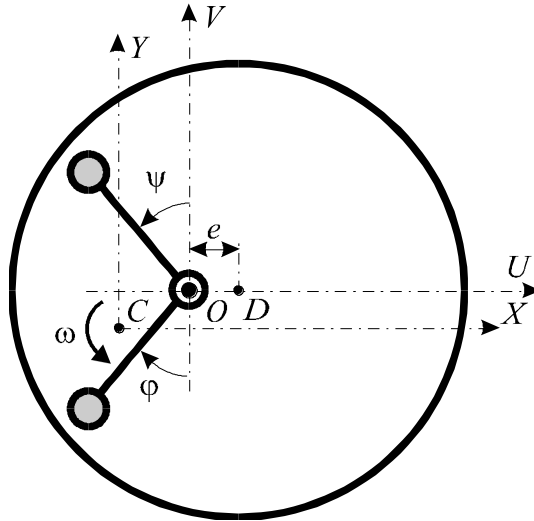


Рис. 1 Плоска модель ізольованої матеріальної системи

Вважаємо, що при повороті маятників відносно тіла на них діють моменти сил в'язкого опору $-h\dot{\varphi}, -h\dot{\psi}$, пропорційні відносним кутовим швидкостям обертання маятників. Положення незрівноваженої маси m_d визначається відстанню $e = |OD|$ від точки D , де знаходиться маса, до точки O . Нехай в основному русі тіло зрівноважене і обертається з кутовою швидкістю ω_0 навколо осі $w = z$. В побічних усталених рухах тіло не зрівноважене і осі w, z не співпадають. В перехідних процесах система здійснює нестационарні рухи.

2. Вивід рівнянь руху системи. Застосовуємо загальні теореми динаміки.

У силу теореми про рух центра мас системи і відповідно до вибору початку осей - точки C , координати центра мас системи відносно осей x, y завжди дорівнюють 0. Теорема дає наступні інтеграли рівнянь руху:

$$Mx + m_d(x + e) + m(2x - l \sin \varphi - l \sin \psi) = 0, \quad My + m_d y + m(2y - l \cos \varphi + l \cos \psi) = 0. \quad (1)$$

Оскільки система ізольована, то має місце закон збереження кінетичного моменту. В початковий момент часу система була зрівноважена і оберталася зі сталою кутовою швидкістю ω_0 навколо осі w . Тому закон має вид

$$L_z = J_{z0} \omega_0, \quad (2)$$

де

$$J_{z0} = J_0 + m_d e_0^2 + 2ml^2 \quad (3)$$

- осьовий момент інерції системи відносно осі $z=w$ у початковий момент часу, L_z - кінетичний момент системи в довільний момент часу. Останній можна подати у виді

$$L_z = L_{ze} + L_{zr}, \quad (4)$$

де L_{ze} - кінетичний момент системи в переносному, L_{zr} - відносному русі. За переносний рух прийнемо обертання системи навколо центра мас разом з осями x, y , а за відносний - рух системи відносно осей x, y . Кінетичний момент переносного руху має вид

$$L_{ze} = J_z \omega, \\ J_z = J_O + M(x^2 + y^2) + m_d[(x+e)^2 + y^2] + m[(x-l\sin\varphi)^2 + (y-l\cos\varphi)^2 + (x-l\sin\psi)^2 + (y+l\cos\psi)^2], \quad (5)$$

де J_z - осьовий момент інерції системи відносно осі z , що перпендикулярна площині руху і проходить через центр мас системи - точку C . Кінетичний момент відносного руху має вид

$$L_{zr} = \vec{k} \cdot (\vec{r}_M \times \vec{v}_{Mr} + \vec{r}_{m_d} \times \vec{v}_{m_dr} + \vec{r}_\varphi \times \vec{v}_{\varphi r} + \vec{r}_\psi \times \vec{v}_{\psi r}), \quad (6)$$

де: \vec{k} - одиничний вектор, спрямований на нас; \vec{r}_i - радіуси-вектори центра мас тіла, матеріальної точки і маятників, \vec{v}_{ir} - їхні відносні швидкості $/i = M, m_d, \varphi, \psi/$. У проекціях на осі x, y, z

$$\begin{aligned} \vec{k}(0, 0, 1), \quad \vec{r}_M(x, y, 0), \quad \vec{v}_{Mr}(x', y', 0), \\ \vec{r}_{m_d}(x+e\cos\gamma, y+e\sin\gamma, 0), \quad \vec{v}_{m_dr}(x', y', 0), \\ \vec{r}_\varphi(x-l\sin\varphi, y-l\cos\varphi, 0), \quad \vec{v}_{\varphi r}(x'-l\varphi'\cos\varphi, y'+l\varphi'\sin\varphi, 0), \\ \vec{r}_\psi(x-l\sin\psi, y+l\cos\psi, 0), \quad \vec{v}_{\psi r}(x'-l\psi'\cos\psi, y'-l\psi'\sin\psi, 0). \end{aligned} \quad (7)$$

Тоді кінетичний момент відносного руху прийме вид

$$\begin{aligned} L_{zr} = [(M + m_d + 2m)x + m_d e - ml(\sin\varphi + \sin\psi)]y' - \\ - [(M + m_d + 2m)y - ml(\cos\varphi - \cos\psi)]x' + \\ + ml(\varphi'\cos\varphi + \psi'\cos\psi)y + ml(\varphi'\sin\varphi - \psi'\sin\psi)x - ml^2(\varphi' - \psi'). \end{aligned} \quad (8)$$

Продиференціюємо один раз за часом інтеграли (1), одержимо

$$\begin{aligned} (M + m_d + 2m)x' - ml(\varphi'\cos\varphi + \psi'\cos\psi) &= 0, \\ (M + m_d + 2m)y' + ml(\varphi'\sin\varphi - \psi'\sin\psi) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Використовуючи формули (1), (8), приводимо L_z до виду

$$\begin{aligned} L_z = [J_O + m_d e^2 + 2ml^2 - (M + m_d + 2m)(x^2 + y^2)]\omega + \\ + (M + m_d + 2m)(x'y - y'x) + ml^2(\psi' - \varphi'). \end{aligned} \quad (10)$$

З [3] рівняння динаміки маятників при змінній швидкості обертання тіла мають вид:

$$\begin{aligned} ml^2(\varphi'' - \omega') + h\varphi' - ml[(x'' - 2\omega y' - \omega^2 x - \omega' y)\cos\varphi - \\ - (y'' + 2\omega x' - \omega^2 y + \omega' x)\sin\varphi] = 0, \\ ml^2(\psi'' + \omega') + h\psi' - ml[(x'' - 2\omega y' - \omega^2 x - \omega' y)\cos\psi + \\ + (y'' + 2\omega x' - \omega^2 y + \omega' x)\sin\psi] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

3. Зведення задачі визначення умов автобалансування до задачі дослідження кінетичної енергії системи на умовний екстремум. Оскільки на систему діють тільки дисипативні сили з неповною дисипацією і її повна енергія співпадає з кінетичною, то

$$\frac{dT}{dt} = -2R, \quad (12)$$

де T - кінетична енергія системи, R - дисипативна функція Релея.

В зв'язку з тим, що під час перехідних процесів до системи не підводиться зовнішня і внутрішня енергія, то з часом рух системи устанеться і кінетична енергія набуде екстремального значення. В усталених рухах маятники з ротором будуть обертатися як одне ціле і кінетична енергія визначатиметься формулою:

$$T_{\text{сист}} = \frac{1}{2} J_{\Sigma} \omega^2, \quad (13)$$

де J_{Σ} - сумарний осьовий момент інерції системи відносно осі w , що проходить через центр мас системи – точку C

$$J_{\Sigma} = J_{\text{рот}} + J_{\text{дис}} + J_1 + J_2, \quad (14)$$

де відповідно:

$$J_{\text{рот}} = J_C + M \cdot r_{CO}^2 - \text{осьовий момент інерції ротора};$$

$$J_{\text{дис}} = m_d r_{m_d}^2 - \text{осьовий момент інерції дисбалансу};$$

$$J_1 = m r_1^2 - \text{осьовий момент інерції першого маятника};$$

$$J_2 = m r_2^2 - \text{осьовий момент інерції другого маятника}.$$

Радіуси вектори центра мас тіла, матеріальної точки і маятників відносно центра мас системи точки C мають вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CO} \llcorner y, 0 \rceil, \quad \vec{r}_{m_d} \llcorner e, y, 0 \rceil, \\ \vec{r}_1 \llcorner -l \sin\varphi, y - l \cos\varphi, 0 \rceil, \quad \vec{r}_2 \llcorner -l \sin\psi, y + l \cos\psi, 0 \rceil. \end{aligned} \quad (15)$$

Підставивши вирази (15) у (14), а (14) у (13), одержимо кінетичну енергію системи в усталеному русі у вигляді:

$$\begin{aligned} T_{\text{сист}} = \frac{1}{2} \omega^2 \llcorner J_C + m_d e^2 + 2ml^2 \rceil + \frac{1}{2} \omega^2 \llcorner M + m_d + 2m \rceil x^2 + y^2 \rceil \\ + \omega^2 m_d x e - \omega^2 ml \llcorner \sin\varphi + y \cos\varphi \rceil \llcorner \sin\psi - y \cos\psi \rceil. \end{aligned} \quad (16)$$

У безрозмірних змінних і параметрах рівняння руху центра мас і кінетичного моменту системи, рівнянь динаміки маятників та кінетичної енергії мають вигляд ($\gamma = 0$):

$$\begin{aligned} u + R_m \sin \varphi_0 - \sin \varphi - \sin \psi &= 0, \\ v + R_m \cos \psi - \cos \varphi &= 0, \\ \left[\frac{1}{R_J} - \frac{u^2 + v^2}{R_m} \right] R_\omega + \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{R_m} + \dot{\psi} - \dot{\varphi} &= \frac{1}{R_J}, \\ \ddot{\varphi} - \dot{R}_\omega + H\dot{\varphi} - (\ddot{u} - 2R_\omega\dot{v} - R_\omega^2 u - \dot{R}_\omega v) \cos \varphi + (\ddot{v} + 2R_\omega\dot{u} - R_\omega^2 v + \dot{R}_\omega u) \sin \varphi &= 0, \\ \ddot{\psi} + \dot{R}_\omega + H\dot{\psi} - (\ddot{u} - 2R_\omega\dot{v} - R_\omega^2 u - \dot{R}_\omega v) \cos \psi - (\ddot{v} + 2R_\omega\dot{u} - R_\omega^2 v + \dot{R}_\omega u) \sin \psi &= 0, \\ T_{\text{сист}} = \frac{1}{2} R_\omega^2 \frac{R_m}{R_J} + \frac{1}{2} R_\omega^2 (u^2 + v^2) - 2R_\omega^2 R_m u \sin \varphi_0 - \\ - R_\omega^2 R_m (\sin \varphi + v \cos \varphi) - (\sin \psi - v \cos \psi), \end{aligned} \quad (17)$$

де в (17) безрозмірні змінні і час:

$$u = \frac{x}{l}, \quad v = \frac{y}{l}, \quad R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \right), \quad (18)$$

і безрозмірні параметри:

$$R_m = \frac{m}{M + 2m + m_d}, \quad R_J = \frac{ml^2}{J_C + m_d e^2 + 2ml^2}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{m_d e}{2ml}. \quad (19)$$

Отже, в усталеному русі кінетична енергія залежить від п'ятих безрозмірних узагальнених координат $u, v, \varphi, \psi, R_\omega$, які зв'язані інтегралами (17). Зробимо наступні зауваження:

- 1) як видно з перших трьох рівнянь системи (17), параметри $u, v, \varphi, \psi, R_\omega$ змінюються одночасно, або одночасно є сталими;
- 2) під час перехідних процесів кінетична енергія системи зменшується, бо дисипативна функція – додатна;
- 3) якщо кількість усталених рухів скінчена, то відбуватися будуть тільки ті, у яких кінетична енергія (17) буде мати абсолютний або локальний мінімум.

Кінетичну енергію можна дослідити на умовний екстремум з допомогою методу Лагранжа [7]. Але, так як основні параметри входять лінійно до інтегралів руху (17), то дану задачу можна вирішити шляхом заміни залежних координат незалежними з наступним дослідженням кінетичної енергії на екстремум по незалежним координатам.

Враховуючи, що в усталених рухах похідні дорівнюють нулю, запишемо третє рівняння системи (17) у вигляді:

$$R_\omega = 1 / \left(1 - \frac{R_J}{R_m} (u^2 + v^2) \right). \quad (20)$$

Виключивши з останнього рівняння системи (17) узагальнені координати φ, ψ, R_ω , одержимо такий вигляд кінетичної енергії в координатах u, v :

$$T_{\text{сист}}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{R_m}{R_J} \frac{1}{1 - \frac{R_J}{R_m} (u^2 + v^2)}. \quad (21)$$

Виключивши з останнього рівняння системи (17) узагальнені координати u, v, R_ω , одержимо такий вигляд кінетичної енергії в координатах φ, ψ :

$$T_{\text{сист}}(\varphi, \psi) = \frac{R_m/2R_J}{1 - 2R_J R_m (+2\sin^2 \varphi_0 - \cos \varphi + \psi) 2\sin \varphi_0 (\sin \varphi + \sin \psi)}. \quad (22)$$

4. Дослідження кінетичної енергії на екстремум.

4.1. Дослідження на екстремум кінетичної енергії, як функції u, v .

Візьмемо частинні похідні від рівняння (21) за u, v і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{u}{\left[1 - \frac{R_J}{R_m} (u^2 + v^2)\right]^2} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{v}{\left[1 - \frac{R_J}{R_m} (u^2 + v^2)\right]^2} = 0. \quad (23)$$

Видно, що $\partial T / \partial u = 0$ і $\partial T / \partial v = 0$ тільки при $u, v = 0$. Це відповідає основному руху. З вигляду кінетичної енергії заключаємо, що на основному русі вона має мінімум. Для того, щоб основний рух був глобально стійкий достатньо, щоб у системи була скінчена кількість побічних усталених рухів за координатами φ, ψ і на них кінетична енергія не мала мінімуму.

4.2. Дослідження на екстремум кінетичної енергії, як функції φ, ψ .

З точністю до однакового сталого множника $R_m^2 / \left[1 - \frac{R_J}{R_m} (u^2 + v^2)\right]^2$ знаходимо:

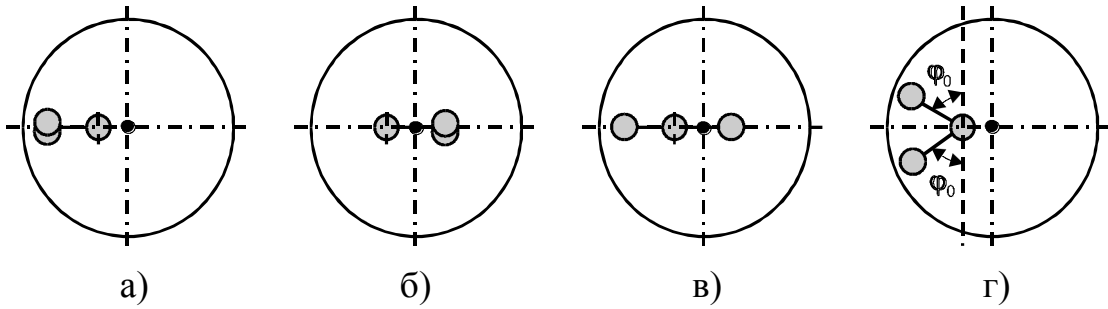
$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &\sim \cos \varphi \sin \psi - 2 \cos \varphi \sin \varphi_0 + \sin \varphi \cos \psi = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \psi} &\sim \sin \varphi \cos \psi - 2 \cos \psi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \sin \psi = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Розглянемо наступні принципово різні випадки, в яких система рівнянь (24) матиме розв'язки.

1. Випадок, коли $\psi, \varphi = \pm \pi/2$. Він дає такі побічні рухи, у яких тіло не зрівноважене (рис. 2, а, б, в):

- 1) $\psi = \varphi = \pi/2$ - маятники відхилені в легкий бік тіла;
- 2) $\psi = \varphi = -\pi/2$ - маятники відхилені у важкий бік тіла;

- 3) $\psi = \pm \pi/2$, $\varphi = \mp \pi/2$ - один маятник відхилений у легкий, а другий - важкий бік тіла.



а), б), в) – побічні рухи; г) – основний рух.

Рис. 2 Усталені рухи системи

2. Випадок, коли $\psi, \varphi \neq \pm \pi/2$. Розглянувши $\frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \psi}$ одержуємо:

$$2 \sin \varphi_0 (\cos \psi - \cos \varphi) \stackrel{?}{=} 0, \quad (25)$$

що можливо, коли $\cos \psi = \cos \varphi$. Звідки отримуємо такі розв'язки: $\psi = \pm \varphi$. Розглядаємо ці два варіанти.

Якщо $\psi = -\varphi$, то оскільки $\psi, \varphi \neq \pm \pi/2$, то рівняння системи (24) не дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} \sim -2 \cos \varphi \sin \varphi_0 \neq 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = -2 \cos \psi \sin \varphi_0 \neq 0$$

і цей випадок не дає нових розв'язків.

Якщо $\psi = \varphi$, то система рівнянь (24) приймає вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 2 \cos \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \stackrel{?}{=} 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 2 \cos \psi (\sin \psi - \sin \varphi_0) \stackrel{?}{=} 0.$$

Оскільки $\psi, \varphi \neq \pm \pi/2$, то рівності будуть виконуватися, коли

$$\varphi = \varphi_0, \quad \psi = \varphi_0, \quad 0 < \varphi_0 < \pi/2. \quad (26)$$

Це відповідає основному руху (рис. 2, д).

Отже за координатами ψ, φ маємо чотири усталених рухи системи – один основний і три побічні.

Для з'ясування характеру нестійкості побічних рухів дослідимо кінетичну енергію системи на екстремум на цих рухах.

У русі $\psi = \varphi = \pi/2$ з точністю до однакового додатного сталого множника $R_m^2 / \left[-4R_j R_m (\sin \varphi_0) \right]$, матимемо:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \sim -1 + 2 \sin \varphi_0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial \psi} \sim -1.$$

Позначимо

$$a_{11} = a_{22} = -1 + 2 \sin \varphi_0, \quad a_{21} = a_{12} = -1,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \left(-2\sin\varphi_0 \right)^2 - 1 < 0. \quad (27)$$

Видно, що кінетична енергія приймає екстремальне значення, яке не є мінімумом, і тому рух нестійкий [5].

У русі $\psi = \varphi = -\pi/2$ з точністю до однакового додатного сталого множника $R_m^2 / \left[-4R_J R_m \left(+\sin\varphi_0 \right)^2 \right]$, матимемо:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \sim -1 - 2\sin\varphi_0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial \psi} \sim -1.$$

Аналогічно першому випадку знаходимо $a_{11} = a_{22} = -1 - 2\sin\varphi_0 < 0$, $a_{21} = a_{12} = -1$, $\Delta = \left(+2\sin\varphi_0 \right)^2 - 1 > 0$. Видно, що кінетична енергія приймає максимальне значення, і тому рух нестійкий [5].

У русі $\psi = \pm\pi/2$, $\varphi = \mp\pi/2$ з точністю до однакового додатного сталого множника $R_m^2 / \left[-4R_J R_m \sin^2 \varphi_0 \right]$, матимемо:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \sim 1 + 2\sin\varphi_0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \sim 1 - 2\sin\varphi_0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial \psi} \sim 1.$$

Аналогічно першому випадку знаходимо $a_{11} = 1 + 2\sin\varphi_0$, $a_{22} = 1 - 2\sin\varphi_0$, $a_{21} = a_{12} = 1$, $\Delta = -4\sin^2 \varphi_0 < 0$. Видно, що кінетична енергія приймає екстремальне значення, яке не є мінімумом, і тому рух нестійкий [5].

Висновки. У випадку ізольованої матеріальної системи, яку утворюють абсолютно тверде тіло, що рухається плоскопаралельно, на центральну вісь якого, перпендикулярну площині руху, насаджені два однакових математичних маятника і усередині якого знаходиться матеріальна точка, що створює дисбаланс:

1. система має чотири істотно відмінних усталених рухи: основний – у якому маятники зрівноважують дисбаланс тіла; три побічних, у яких тіло розбалансоване, причому в першому – маятники відхилені в легкий бік тіла, в другому – у важкий, в третьому – один маятник відхилений у легкий, а інший у важкий бік тіла;
2. в основному русі кінетична енергія приймає абсолютний мінімум, в першому і третьому побічному русі кінетична енергія приймає екстремальне значення, що не є мінімумом, у другому побічному русі – максимальна;
3. основний рух глобально стійкий, а побічні – нестійкі.

5. Дослідження стійкості основного усталеного руху. Дослідимо рівняння:

$$\begin{aligned}
 u + R_m(2\sin\varphi_0 \cos\gamma - \sin\varphi - \sin\psi) &= 0, \\
 v + R_m(2\sin\varphi_0 \sin\gamma - \cos\varphi + \cos\psi) &= 0, \\
 \ddot{\varphi} - \dot{p} + H\dot{\varphi} - (\ddot{u} - 2p\dot{v} - p^2u - \dot{p}v)\cos\varphi + (\ddot{v} + 2p\dot{u} - p^2v + \dot{p}u)\sin\varphi &= 0, \\
 \ddot{\psi} + \dot{p} + H\dot{\psi} - (\ddot{u} - 2p\dot{v} - p^2u - \dot{p}v)\cos\psi - (\ddot{v} + 2p\dot{u} - p^2v + \dot{p}u)\sin\psi &= 0. \\
 \left[\frac{1}{R_J} - \frac{u^2 + v^2}{R_m} \right] p + \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{R_m} + \dot{\psi} - \dot{\varphi} &= \frac{1}{R_J},
 \end{aligned} \tag{28}$$

Тут точка над змінною означає похідну по τ . Основний рух у безрозмірних координатах має вид

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad \varphi_1 = -\gamma + \varphi_0, \quad \psi_1 = \gamma + \varphi_0, \quad p_1 = 1. \tag{29}$$

Введемо відхилення від основного руху

$$u = u, \quad v = v, \quad \alpha = \varphi + \gamma - \varphi_0, \quad \beta = \psi - \gamma - \varphi_0, \quad q = p - 1. \tag{30}$$

З перших трьох рівностей у (28), із точністю до величин першого порядку мализни, знаходимо

$$\begin{aligned}
 u &= R_m[\alpha \cos(\varphi_0 - \gamma) + \beta \cos(\varphi_0 + \gamma)], \quad v = -R_m[\alpha \sin(\varphi_0 - \gamma) - \beta \sin(\varphi_0 + \gamma)], \\
 \dot{u} &= R_m[\dot{\alpha} \cos(\varphi_0 - \gamma) + \dot{\beta} \cos(\varphi_0 + \gamma)], \quad \dot{v} = -R_m[\dot{\alpha} \sin(\varphi_0 - \gamma) - \dot{\beta} \sin(\varphi_0 + \gamma)], \\
 \ddot{u} &= R_m[\ddot{\alpha} \cos(\varphi_0 - \gamma) + \ddot{\beta} \cos(\varphi_0 + \gamma)], \quad \ddot{v} = -R_m[\ddot{\alpha} \sin(\varphi_0 - \gamma) - \ddot{\beta} \sin(\varphi_0 + \gamma)], \\
 p &= 1 + R_J(\dot{\varphi} - \dot{\psi}), \quad \dot{p} = R_J(\ddot{\varphi} - \ddot{\psi}).
 \end{aligned} \tag{31}$$

Тоді два останніх рівняння в (28) зводяться до виду

$$\begin{aligned}
 (1 - R_m - R_J)\ddot{\alpha} + H\dot{\alpha} + R_m\alpha + \\
 + [R_J - R_m \cos 2\varphi_0]\ddot{\beta} + 2R_m\dot{\beta} \sin 2\varphi_0 + R_m\beta \cos 2\varphi_0 &= 0, \\
 (1 - R_m - R_J)\ddot{\beta} + H\dot{\beta} + R_m\beta + \\
 + [R_J - R_m \cos 2\varphi_0]\ddot{\alpha} - 2R_m\dot{\alpha} \sin 2\varphi_0 + R_m\alpha \cos 2\varphi_0 &= 0.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Знайдемо характеристичне рівняння. Позначимо

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= a_{22} = (1 - R_m - R_J)\lambda^2 + H\lambda + R_m, \\
 a_{12} &= (R_J - R_m \cos 2\varphi_0)\lambda^2 + 2R_m\lambda \sin 2\varphi_0 + R_m \cos 2\varphi_0, \\
 a_{21} &= (R_J - R_m \cos 2\varphi_0)\lambda^2 - 2R_m\lambda \sin 2\varphi_0 + R_m \cos 2\varphi_0.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Тоді характеристичне рівняння має вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0,$$

$$a_0 = (1 - 2R_J - R_m + R_m \cos 2\varphi_0)(1 - R_m - R_m \cos 2\varphi_0), \quad (34)$$

$$a_1 = 2H(1 - R_m - R_J), \quad a_2 = 2R_m(1 - R_J - R_J \cos 2\varphi_0) + 2R_m^2 \sin^2 2\varphi_0 + H^2,$$

$$a_3 = 2HR_m, \quad a_4 = R_m^2 \sin^2 2\varphi_0.$$

Критерій Рауса-Гурвіца дає наступні умови асимптотичної стійкості

$$a_i > 0, \quad /i = \overline{1,4}/, \quad \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4. \quad (35)$$

Перша група умов буде виконуватися, якщо буде виконуватися умова $1 - 2R_J - R_m + R_m \cos 2\varphi_0 > 0$,

$$\text{або, } 1 - 2R_J - 2R_m \sin^2 \varphi_0 > 0, \quad (36)$$

Якщо в умову (35) підставити параметри з (19), то вона стане еквівалентною наступній умові

$$(M + 2m \cos^2 \varphi_0)(J_O + m_d e^2) + J_O m_d > 0,$$

яка виконується при будь-яких дисбалансах, що забезпечують існування основного руху.

Остання умова в (35), по підстановці a_i , набуває виду

$$\Delta_3 = 4R_m H^4 (1 - R_m - R_J) +$$

$$+ 4R_m^2 H^2 \left[[R_J (1 + \cos 2\varphi_0) - (1 - 2R_m) \cos 2\varphi_0]^2 + \right] > 0. \quad (37)$$

Видно, що ця умова виконується автоматично при виконанні умови (36). Швидкість затухання збурень визначають корені характеристичного рівняння (34).

Література

1. Гусаров А.А., Сусанин В.И. и др. Автоматическая балансировка роторов машин. М.: "Наука", 1979, 151 с.
2. Филимоных Г.Б. К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира // Доп. НАН України. Сер.А. – 1996. - №8. – С. 74-78..
3. Філімоніхін Г.Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізолюваного абсолютно твердого тіла // Вісник, математика-механіка. Київський національний університет. Вип. №7-8, 2002. С.67-71.
4. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. – 1997. – т.35. №6. – С. 651-658.

5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // собр. соч.: в 6-ти т. -М. -Л.: Изд-во АН СССР, 1956. -2. -С.7-264.
6. Муйжниец А.И. Некоторые вопросы теории автоматической динамической балансировки // Вопросы динамики и прочности. Вып. - 6. Рига: Изд-во АН ЛатССР, 1959. -С.123-145.
7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: Учебник для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов. В 3 т. Т. 2. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988. – 576 с.: ил.

**Друкується у відповідності з рішенням вченої ради
Кіровоградського державного технічного університету**

назва організації

від 29 грудня 2003 р. , протокол № 4

дата засідання

© ДНТБ України, 200 3 р.